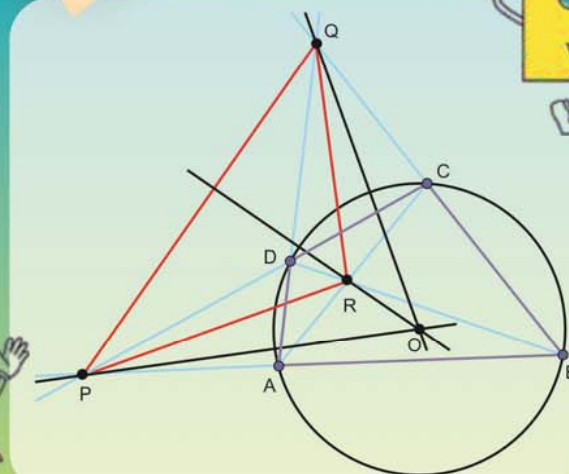
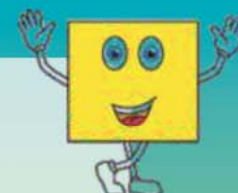


Посетувајте ја  
постојаната  
изложба на  
книги на  
страната на  
Сојузот на  
математичари на  
Македонија  
[www.smm.com.mk](http://www.smm.com.mk)



ПОПУЛАРНО МАТЕМАТИЧКО СПИСАНИЕ  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

# НУМЕРУС



$$\begin{array}{r} 4 \\ + 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$- 2 \times 6$$

$$+ 35$$

$$4$$



2018/2019  
XLIV - 1





Математичко списание НУМЕРУС за учениците од основното образование.  
Излегува во четири број од по 48 страници во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 75 денари, а претплатата за четири броја е 300 денари. Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса: НУМЕРУС, Сојуз на математичари на Македонија, Бул. "Александар Македонски" бб, ПФ 10, Скопје, email [numerus@t-home.mk](mailto:numerus@t-home.mk). Нарачки по телефон и контакт од 9 до 15 часот на 02-311-6053, жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СМ на Македонија (со назнака за НУМЕРУС).

## СОДРЖИНА

1. Малчески, С. Да размислуваме правилно	1
2. V општински натпревар по математика за учениците од основното образование	6
3. Кенгур 2018, II и III одделение	15
4. Аневска, К. Питагорови тројки	20
5. Конкурсни задачи	23
6. Конкурсни задачи за математички натпревари	25
7. Награди задачи	27
8. Главче, М. Една задача, повеќе начини на решавање	28
9. Малчески Р. Решаваме конструктивни задачи	30
10. Решенија на конкурсните задачи од минатиот број	33
11. Решенија на конкурсните задачи за математички натпревари од минатиот број	43
12. Решенија на наградните задачи од минатиот број	48

### Редакциски одбор

д-р Ристо Малчески, главен и одговорен уредник  
д-р Алекса Малчески, одговорен уредник  
д-р Слаѓана Брсакоска, одговорен уредник  
д-р Сава Гроздев, уредник  
д-р Павел Димовски, уредник  
д-р Даниел Велинов, уредник  
д-р Катерина Аневска, уредник  
д-р Методи Главче, уредник  
Петар Фалитовски, уредник

д-р Ѓорѓи Маркоски, уредник  
д-р Љупчо Настовски, уредник  
д-р Валентина Миовска, уредник  
д-р Сања Костадинова, уредник  
д-р Томи Димовски, уредник  
д-р Делчо Лешковски, уредник  
Јасмина Маркоска, уредник  
Златко Петковски, уредник

Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Алекса Малчески

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИТЕ  
НА МАКЕДОНИЈА

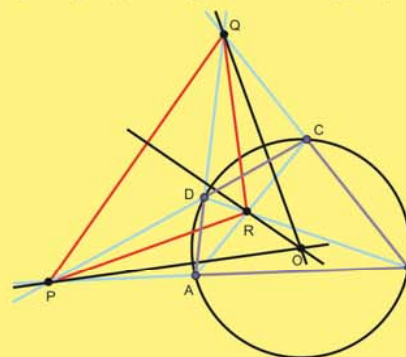
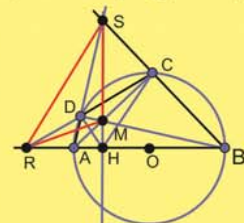
## Теорема на Брокард

**Теорема на Брокард.** Нека четириаголникот  $ABCD$  е впишан во кружница со центар  $O$  и нека  $AB \cap CD = P$ ,  $AD \cap BC = Q$  и  $AC \cap BD = R$ . Тогаш  $O$  е ортоцентар за  $\Delta PQR$ .

Во продолжение ќе дадеме една задача која се решава со оваа теорема, а беше натпреварувачка задача на последното БМО.

Четириаголникот  $ABCD$ , каде  $AB > CD$  и  $AB$  не е паралелна на  $CD$ , е впишан во кружница  $k$ . Точката  $M$  е пресек на дијагоналите  $AC$  и  $BD$  и висината спуштена од  $M$  кон  $AB$  ја сече отсечката  $AB$  во точка  $H$ . Ако  $HM$  е симетрала на  $\angle CHD$ , докажи дека  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

**Доказ.** Нека  $O$  е центарот на кружницата  $k$ . Низ  $M$  повлекуваме права паралелна на  $AB$  која ги сече  $AD, DH, BC$  и  $CH$  во точките  $K, P, L$  и  $Q$  соодветно. Триаголникот  $PHQ$  е рамнокрак ( $HM \perp PQ$  и  $\angle PHM = \angle QHM$ ) па  $\overline{MP} = \overline{MQ}$ . Од



$$\frac{\overline{MP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{AB}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MQ}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{AB}} \quad \text{имаме}$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{AB} = \overline{KM} \cdot \overline{BH} \quad \text{и} \quad \overline{MQ} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{ML} \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}}.$$

Нека  $AD \cap BC = \{S\}$  и нека  $SM \cap AB = \{H'\}$ . Тогаш од  $\frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$

имаме  $H' \equiv H$  т.е.  $S$  лежи на  $HM$  и  $SH \perp AB$ . Нека  $AB \cap CD = R$ . Тогаш од теорема на Брокард следува дека  $O$  е ортоцентар за  $\Delta RMS$  и  $SM \perp RO$ . Но  $SH \perp AB$  ( $S, M$  и  $H$  се колинеарни), па  $O$  лежи на  $AB$  т.е.  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

## Хенри Брокард

Пјер Рене Жан Баптист Хенри Брокард е роден на 12 мај 1845 во Вигнот, Франција. Тој е познат француски метеоролог и математичар. Неговите најголеми достигнувања се во геометријата, меѓу кои се прва точка на Брокард, втора точка на Брокард, агол на Брокард, кружница на Брокард и триаголник на Брокард. Брокард иста така го открил познатиот нерешен проблем  $n!+1 = m^2$ , каде што  $n$  и  $m$  се природни броеви, кој во негова чест е наречен проблем на Брокард. За овој проблем до сега најдени се три парови решенија  $(n, m) \in \{(4, 5), (5, 11), (7, 71)\}$ . Тој бил почесен член на Меѓународната академија на науките и присуствувал на Меѓународниот конгрес на математичари во Цирих 1897, Париз 1900, Хајделберг 1904, Рим 1908, Кембриџ 1912 и во Стразбур 1920 година. Тој дејствувал како метеоролог во француската морнарица и генерален техничар, а го основал и Метеоролошкиот институт во Алжир. Брокард умира на 16 јануари 1922 година. Во согласност со неговото барање, бил погребан на малите гробишта во Вигнот, до неговите родители.

---

Математичко списание НУМЕРУС за учениците од основното образование.  
Излегува во четири број од по 48 страници во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 75 денари, а претплатата за четири броја е 300 денари. Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса: НУМЕРУС, Сојуз на математичари на Македонија, Бул. “Александар Македонски” бб, ПФ 10, Скопје, email [Numerus@t-home.mk](mailto: Numerus@t-home.mk). Нарачки по телефон и контакт од 9 до 15 часот на 02-311-6053, жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СМ на Македонија (со назнака за НУМЕРУС).

---

## СОДРЖИНА

1. Малчески, С. Да размислуваме правилно	1
2. V општински натпревар по математика за учениците од основното образование	6
3. Кенгур 2018, II и III одделение	15
4. Аневска, К. Питагорови тројки	20
5. Конкурсни задачи	23
6. Конкурсни задачи за математички натпревари	25
7. Награди задачи	27
8. Главче, М. Една задача, повеќе начини на решавање	28
9. Малчески Р. Решаваме конструктивни задачи	30
10. Решенија на конкурсните задачи од минатиот број	33
11. Решенија на конкурсните задачи за математички натпревари од минатиот број	43
12. Решенија на наградните задачи од минатиот број	48

### Редакциски одбор

д-р Ристо Малчески, главен и одговорен уредник  
д-р Алекса Малчески, одговорен уредник  
д-р Слаѓана Браскоска, одговорен уредник  
д-р Сава Гроздев, уредник  
д-р Павел Димовски, уредник  
д-р Даниел Велинов, уредник  
д-р Катерина Аневска, уредник  
д-р Методи Главче, уредник  
Петар Филиповски, уредник

д-р Ѓорѓи Маркоски, уредник  
д-р Љупчо Настовски, уредник  
д-р Валентина Миовска, уредник  
д-р Сања Костадинова, уредник  
д-р Томи Димовски, уредник  
д-р Делчо Лешковски, уредник  
Јасмина Маркоска, уредник  
Златко Петковски, уредник

Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Алекса Малчески

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИТЕ  
НА МАКЕДОНИЈА

---

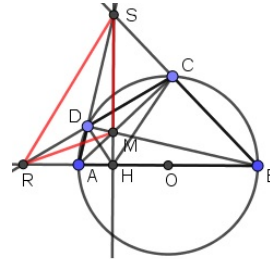
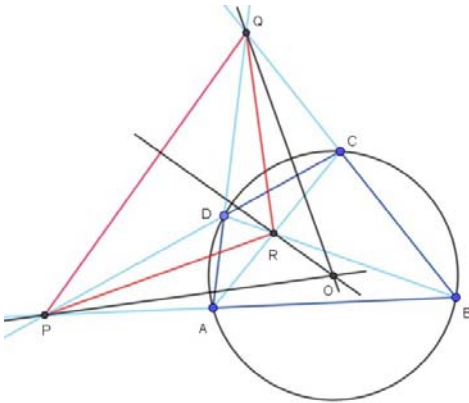
# Теорема на Броккард

**Теорема на Броккард.** Нека четириаголникот  $ABCD$  е впишан во кружница со центар  $O$  и нека  $AB \cap CD = P$ ,  $AD \cap BC = Q$  и  $AC \cap BD = R$ . Тогаш  $O$  е ортоцентар за  $\Delta PQR$ .

Во продолжение ќе дадеме една задача која се решава со оваа теорема, а беше натпреварувачка задача на последното БМО.

Четириаголникот  $ABCD$ , каде  $AB > CD$  и  $AB$  не е паралелна на  $CD$ , е впишан во кружница  $k$ . Точката  $M$  е пресек на дијагоналите  $AC$  и  $BD$  и висината спуштена од  $M$  кон  $AB$  ја сече отсечката  $AB$  во точка  $H$ . Ако  $HM$  е симетрала на  $\angle CHD$ , докажи дека  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

**Доказ.** Нека  $O$  е центарот на кружницата  $k$ . Низ  $M$  повлекуваме права паралелна на  $AB$  која ги сече  $AD, DH, BC$  и  $CH$  во точките  $K, P, L$  и  $Q$  соодветно. Триаголникот  $PHQ$  е рамнокрак ( $HM \perp PQ$  и  $\angle PHM = \angle QHM$ ) па  $\overline{MP} = \overline{MQ}$ . Од



$$\frac{\overline{MP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{AB}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MQ}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{AB}} \quad \text{имаме}$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{AB} = \overline{KM} \cdot \overline{BH} \quad \text{и} \quad \overline{MQ} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{ML} \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}}. \quad \text{Нека } AD \cap BC = \{S\} \quad \text{и нека}$$

$$SM \cap AB = \{H'\}. \quad \text{Тогаш од } \frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

имаме  $H' \equiv H$  т.е.  $S$  лежи на  $HM$  и  $SH \perp AB$ . Нека  $AB \cap CD = R$ . Тогаш од теорема на Броккард следува дека  $O$  е ортоцентар за  $\Delta RMS$  и  $SM \perp RO$ . Но  $SH \perp AB$  ( $S, M$  и  $H$  се колинеарни), па  $O$  лежи на  $AB$  т.е.  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

## Хенри Броккард

Џер Рене Жан Баптист Хенри Броккард е роден на 12 мај 1845 во Вигнот, Франција. Тој е познат француски метеоролог и математичар. Неговите најголеми достигнувања се во геометријата, меѓу кои се прва точка на Броккард, втора точка на Броккард, агол на Броккард, кружница на Броккард и триаголник на Броккард. Броккард иста така го открил познатиот нерешен проблем  $n! + 1 = m^2$ , каде што  $n$  и  $m$  се природни броеви, кој во негова чест е наречен проблем на Броккард. За овој проблем до сега најдени се три парови решенија  $(n, m) \in \{(4, 5), (5, 11), (7, 71)\}$ . Тој бил почесен член на Меѓународната академија на науките и присуствувал на Меѓународниот конгрес на математичари во Цирих 1897, Париз 1900, Хајделберг 1904, Рим 1908, Кембриџ 1912 и во Стразбур 1920 година. Тој дејствувал како метеоролог во француската морнарица и генерален техничар, а го основал и Метеоролошкиот институт во Алжир. Броккард умира на 16 јануари 1922 година. Во согласност со неговото барање, бил погребан на малите гробишта во Вигнот, до неговите родители.



Математичко списание НУМЕРУС за учениците од основното образование.  
Излегува во четири број од по 48 страници во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 75 денари, а претплатата за четири броја е 300 денари. Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса: НУМЕРУС, Сојуз на математичари на Македонија, Бул. "Александар Македонски" бб, ПФ 10, Скопје, email [numerus@t-home.mk](mailto:numerus@t-home.mk). Нарачки по телефон и контакт од 9 до 15 часот на 02-311-6053, жиро сметка 300000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СМ на Македонија (со назнака за НУМЕРУС).

## СОДРЖИНА

1. Малчески, С. Да размислуваме правилно	1
2. V општински натпревар по математика за учениците од основното образование	6
3. Кенгур 2018, II и III одделение	15
4. Аневска, К. Питагорови тројки	20
5. Конкурсни задачи	23
6. Конкурсни задачи за математички натпревари	25
7. Награди задачи	27
8. Главче, М. Една задача, повеќе начини на решавање	28
9. Малчески Р. Решаваме конструктивни задачи	30
10. Решенија на конкурсните задачи од минатиот број	33
11. Решенија на конкурсните задачи за математички натпревари од минатиот број	43
12. Решенија на наградните задачи од минатиот број	48

### Редакциски одбор

д-р Ристо Малчески, главен и одговорен уредник  
д-р Алекса Малчески, одговорен уредник  
д-р Слаѓана Брсакоска, одговорен уредник  
д-р Сава Гроздев, уредник  
д-р Павел Димовски, уредник  
д-р Даниел Велинов, уредник  
д-р Катерина Аневска, уредник  
д-р Методи Главче, уредник  
Петар Фалитовски, уредник

д-р Ѓорѓи Маркоски, уредник  
д-р Љупчо Настовски, уредник  
д-р Валентина Миовска, уредник  
д-р Сања Костадинова, уредник  
д-р Томи Димовски, уредник  
д-р Делчо Лешковски, уредник  
Јасмина Маркоска, уредник  
Златко Петковски, уредник

Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Алекса Малчески

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИТЕ  
НА МАКЕДОНИЈА

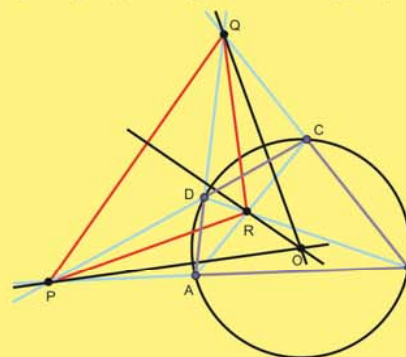
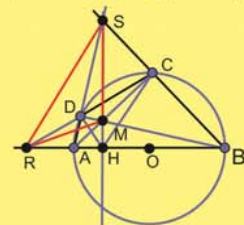
## Теорема на Брокард

**Теорема на Брокард.** Нека четириаголникот  $ABCD$  е впишан во кружница со центар  $O$  и нека  $AB \cap CD = P$ ,  $AD \cap BC = Q$  и  $AC \cap BD = R$ . Тогаш  $O$  е ортоцентар за  $\Delta PQR$ .

Во продолжение ќе дадеме една задача која се решава со оваа теорема, а беше натпреварувачка задача на последното БМО.

Четириаголникот  $ABCD$ , каде  $AB > CD$  и  $AB$  не е паралелна на  $CD$ , е впишан во кружница  $k$ . Точката  $M$  е пресек на дијагоналите  $AC$  и  $BD$  и висината спуштена од  $M$  кон  $AB$  ја сече отсечката  $AB$  во точка  $H$ . Ако  $HM$  е симетрала на  $\angle CHD$ , докажи дека  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

**Доказ.** Нека  $O$  е центарот на кружницата  $k$ . Низ  $M$  повлекуваме права паралелна на  $AB$  која ги сече  $AD, DH, BC$  и  $CH$  во точките  $K, P, L$  и  $Q$  соодветно. Триаголникот  $PHQ$  е рамнокрак ( $HM \perp PQ$  и  $\angle PHM = \angle QHM$ ) па  $\overline{MP} = \overline{MQ}$ . Од



$$\frac{\overline{MP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{AB}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MQ}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{AB}} \quad \text{имаме}$$

$$\overline{MP} \cdot \overline{AB} = \overline{KM} \cdot \overline{BH} \quad \text{и} \quad \overline{MQ} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{ML} \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}}. \quad \text{Нека } AD \cap BC = \{S\} \quad \text{и нека}$$

$$SM \cap AB = \{H'\}. \quad \text{Тогаш од } \frac{\overline{AH'}}{\overline{H'B}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

имаме  $H' \equiv H$  т.е.  $S$  лежи на  $HM$  и  $SH \perp AB$ . Нека  $AB \cap CD = R$ . Тогаш од теорема на Брокард следува дека  $O$  е ортоцентар за  $\Delta RMS$  и  $SM \perp RO$ . Но  $SH \perp AB$  ( $S, M$  и  $H$  се колинеарни), па  $O$  лежи на  $AB$  т.е.  $AB$  е дијаметар на кружницата  $k$ .

## Хенри Брокард

Пјер Рене Жан Баптист Хенри Брокард е роден на 12 мај 1845 во Вигнот, Франција. Тој е познат француски метеоролог и математичар. Неговите најголеми достигнувања се во геометријата, меѓу кои се прва точка на Брокард, втора точка на Брокард, агол на Брокард, кружница на Брокард и триаголник на Брокард. Брокард иста така го открил познатиот нерешен проблем  $n!+1 = m^2$ , каде што  $n$  и  $m$  се природни броеви, кој во негова чест е наречен проблем на Брокард. За овој проблем до сега најдени се три парови решенија  $(n, m) \in \{(4, 5), (5, 11), (7, 71)\}$ . Тој бил почесен член на Меѓународната академија на науките и присуствувал на Меѓународниот конгрес на математичари во Цирих 1897, Париз 1900, Хајделберг 1904, Рим 1908, Кембриџ 1912 и во Стразбур 1920 година. Тој дејствувал како метеоролог во француската морнарица и генерален техничар, а го основал и Метеоролошкиот институт во Алжир. Брокард умира на 16 јануари 1922 година. Во согласност со неговото барање, бил погребан на малите гробишта во Вигнот, до неговите родители.